ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

ЛЕКЦІЯ 3

ПЛАН

1. Момент інерції тіла
2. Таблиця моментів інерції тіл правильної форми
3. Теорема Штейнера
4. Кінетична енергія тіла, що обертається
5. Момент сили
6. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла
7. Закон збереження моменту імпульсу

НА САМОСТІЙНЕ ОПРАЦЮВАННЯ

1. Проробити зміст лекції та відповідні розділи у підручниках.
2. Підготуватися до письмового опиту з теми «Динаміка»

ЛІТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики в 3-х томах. Учебное пособие для студентов вузов.-М.:Наука, 1986-1988, т.1, с. 74-110.

2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Київ. “Техніка, ” т.1, с. 71-103.

3. Трофимова Т.И. Краткий курс физики. М.: Высшая школа 1990-2000, с.21-26, 28-33.

4. І.Є.Лопатинський та інш. Курс фізики (фізика для інженерів), 2003, с.11-16.

Момент інерції тіла

Будь-яке тверде тіло (ТТ) можна умовно поділити на таку кількість N малих частин, щоб розміри їх були малі порівняно з розмірами цього тіла. Тоді ТТ можна розглядати як систему з *N* матеріальних точок (МТ), а маса ТТ дорівнюватиме

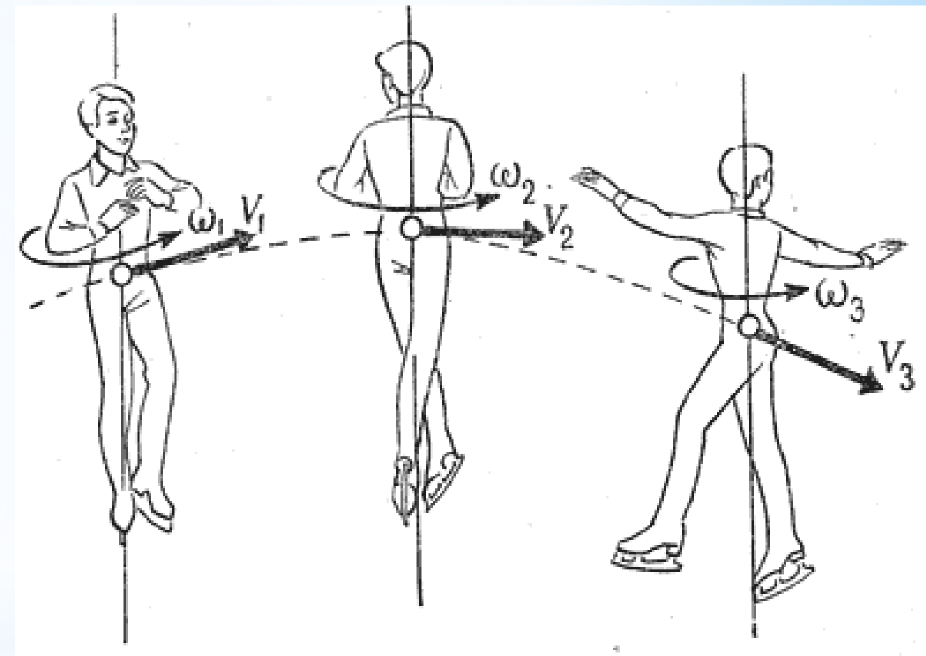
$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

(маса – адитивна величина, тобто маса тіла дорівнює арифметичній сумі мас його окремих частин)

Момент інерції тіла

При вивченні обертального руху ТТ користуються поняттям моменту інерції. Воно базується на уявленні про масу як міру інертності. У випадку обертального руху не досить знати, якою є маса тіла, також необхідно знати, як ця маса розподілена відносно осі обертання.

Наприклад, у фігурному катанні, якщо спортсмен складає руки вздовж тіла, то швидкість його обертання збільшується, коли руки розводить - сповільнюється. Маса ж залишається однаковою в обох випадках. **Змінюється розподіл маси відносно осі обертання**. При цьому якраз і відбувається зміна моменту інерції.



Момент інерції тіла

Моментом інерції матеріальної точки масою m_i відносно осі обертання z називається фізична величина, що дорівнює добутку маси МТ на квадрат її відстані до осі обертання z

$$J_{zi} = m_i \cdot r_i^2$$

Моментом інерції тіла (системи тіл) відносно осі обертання z

називається скалярна ФВ, рівна сумі добутків мас всіх МТ системи на квадрати їх відстаней до осі обертання Z

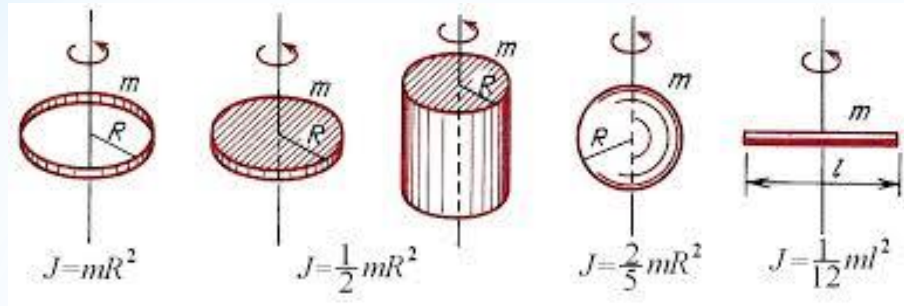
$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

У випадку неперервного розподілу мас ця сума зводиться до інтегралу

$$J_z = \int r^2 dm$$

Моменти інерції тіл правильної геометричної форми

$$J_z = \int r^2 dm$$

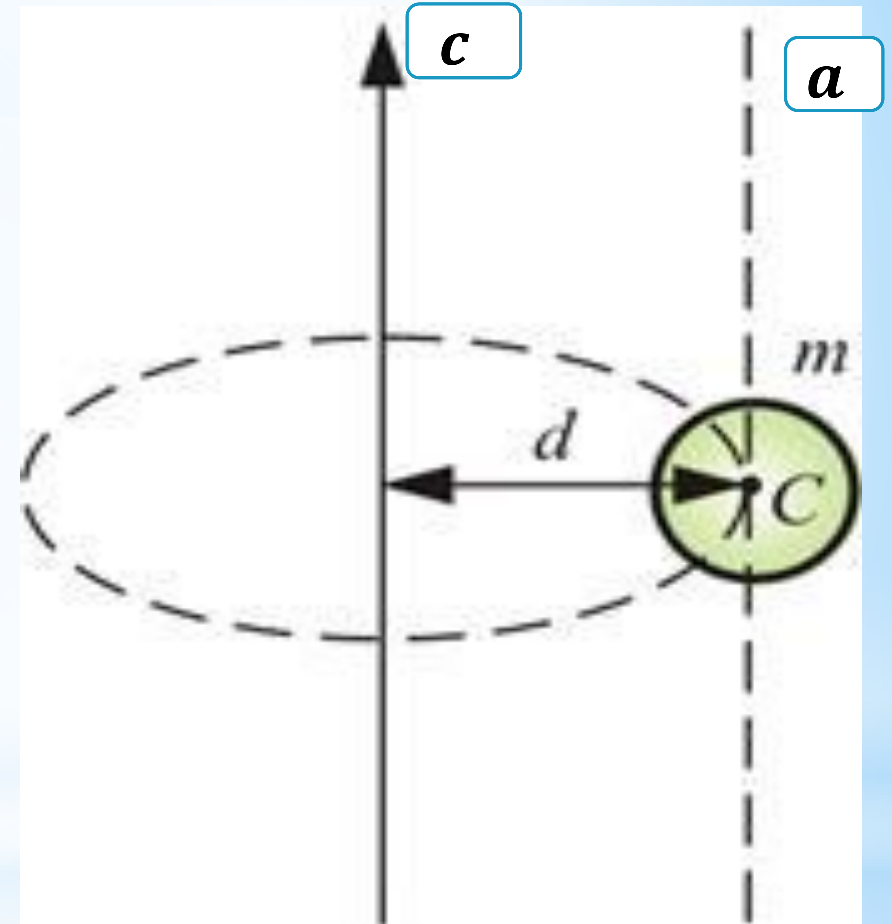


Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Полий тонкостінний циліндр радіусом R	Вісь симетрії	mR^2
Суцільний циліндр або диск радіусом R	Вісь симетрії	$\frac{1}{2}mR^2$
Куля радіусом R	Вісь проходить через центр кулі	$\frac{2}{5}mR^2$
Прямий тонкий стержінь довжиною l	Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямий тонкий стержінь довжиною l	Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його кінець	$\frac{1}{3}ml^2$

Теорема Штейнера

дозволяє знаючи момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас, визначити момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної до неї осі:

момент інерції тіла J_a відносно довільної осі обертання дорівнює сумі моменту інерції цього тіла J_c відносно паралельної їй осі, яка проходить через центр мас (С), та добутку маси m тіла на квадрат відстані d між осями



$$J_a = J_c + md^2$$

Кінетична енергія тіла, що обертається

Нехай маємо ТТ, що обертається навколо осі z. Уявно розділимо його на n маленьких об'ємів з елементарними масами m_i , які розташовані на відстані r_i від осі обертання. При обертанні ТТ відносно нерухомої осі його елементарні об'єми будуть описувати кола різних радіусів r_i і відповідно мати різні лінійні швидкості v_i. Але оскільки ми розглядаємо абсолютно тверде тіло (АТТ), то кутова швидкість обертання цих об'ємів однакова, отже для усіх елементарних об'ємів (а їх можна вважати МТ) $\omega = \frac{v_i}{r_i}$

Кінетичну енергію елементарного об'єму масою m_i визначають, як

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кінетична енергія тіла, що обертається

Тоді кінетичну енергію ТТ, що обертається визначають, як суму кінетичних енергій усіх його точок

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Врахувавши зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями, здійснимо наступні математичні перетворення:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

Кінетична енергія поступального руху	Кінетична енергія обертального руху
$W_k = \frac{mv^2}{2}$	$W_k = \frac{J\omega^2}{2}$

Кінетична енергія тіла, що обертається

При порівнянні виразів для кінетичних енергій поступального і обертального рухів видно, що момент інерції при обертальному русі є аналогом маси при поступальному, тобто

момент інерції є мірою інертності тіла при його обертальному русі!

Якщо ж маємо складний рух, наприклад куля масою ***m*** котиться по похилій площині без ковзання, тобто приймає участь як в поступальному, так і у обертальному рухах одночасно, то повна кінетична енергія складається із суми відповідних енергії поступального руху та енергії обертання:

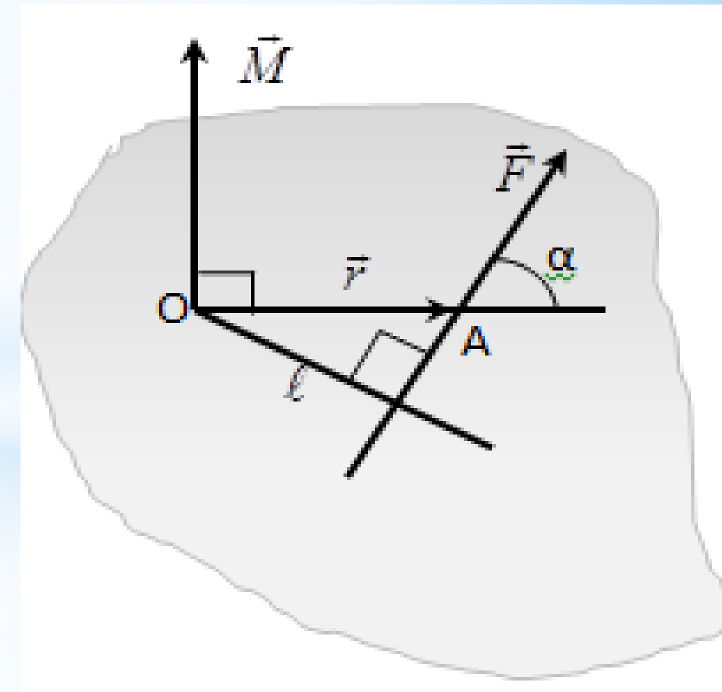
$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}$$

Момент сили

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, яка призводить до зміни обертального руху тіла, вводять поняття моменту сили.

Розрізняють момент сили відносно точки та відносно осі обертання.

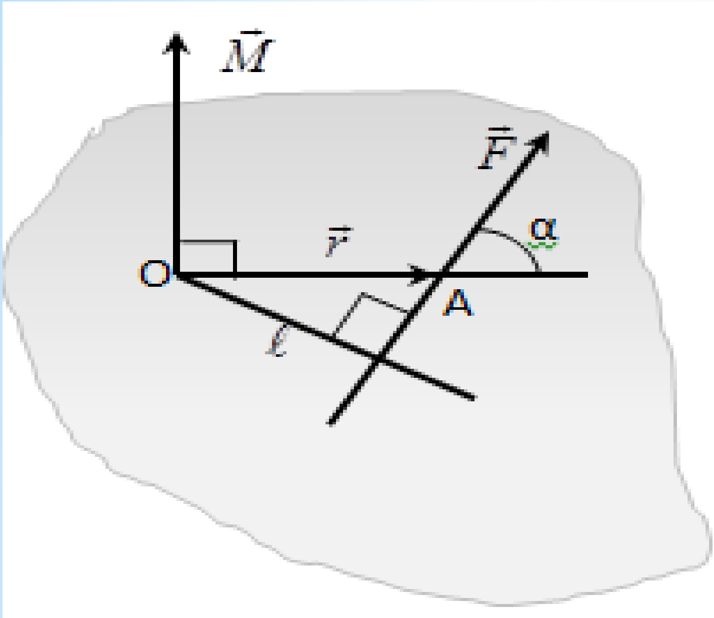
Момент сили відносно нерухомої точки (центру обертання) – це фізична величина, яка визначається векторним добутком радіус-вектора, проведеного із т.О в точку прикладання сили, та цієї сили



$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$M_i = F_i\, r_i \sin\alpha$$

Момент сили відносно нерухомої точки



α - кут між векторами $\vec{r}_i$ і $\vec{F}_i$

$l = r_i sin\alpha$ – найкоротша відстань між центром обертанна та лінією дії сили – плече сили

Момент сили відносно точки – це ***псевдовектор*** (або аксіальний вектор), його напрям співпадає з напрямом поступального руху правого гвинта

$$M_i = F_i\, r_i \sin\alpha$$

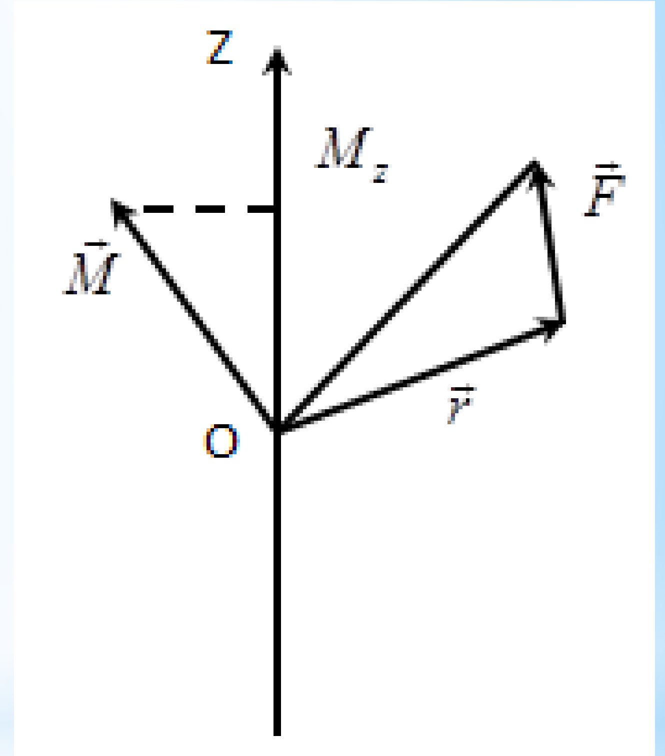
Момент сили характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він визначається.

Момент сили відносно нерухомої осі

Моментом сили відносно нерухомої осі $\boldsymbol{OZ}$ називається скалярна величина, рівна проекції на цю вісь вектора момента сили, визначеного відносно довільної точки $\boldsymbol{O}$ заданої осі $\boldsymbol{Z}$. Значення його не залежить від вибору положення точки на осі $\boldsymbol{Z}$.

Розмірність моменту сили в системі СІ

$[\boldsymbol{M}] = 1$ Н·м.



Головний момент

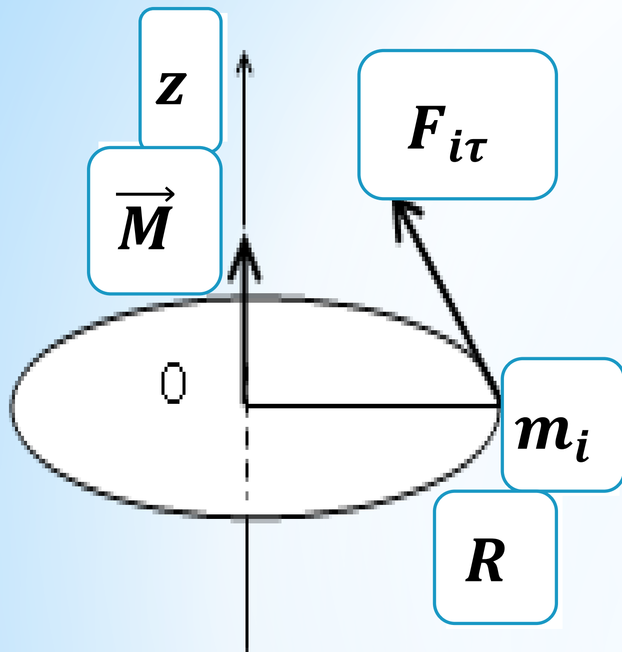
Векторна сума моментів всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, називається **головним моментом зовнішніх сил відносно точки**

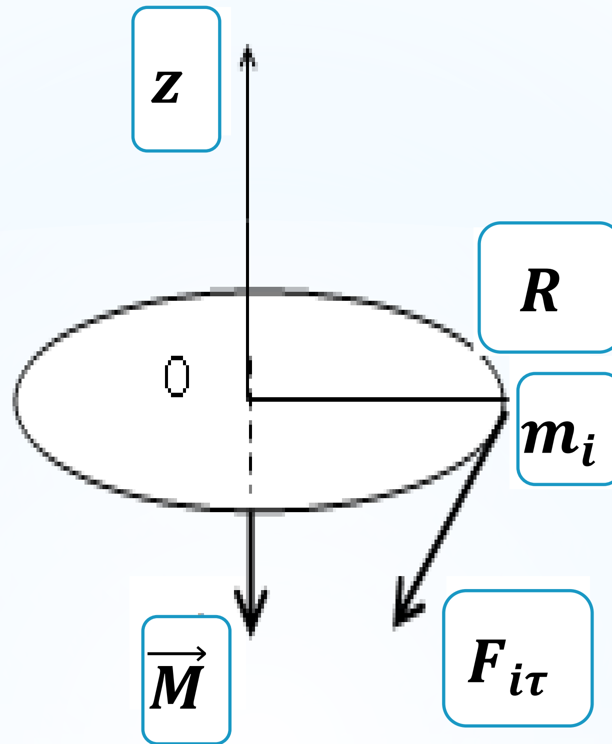
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Головний (результуючий) момент відносно нерухомої осі ***OZ*** системи характеризує здатність сили обертати систему (тіло) навколо цієї осі та дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї осі

$$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i F_{i\tau}$$

Головний момент





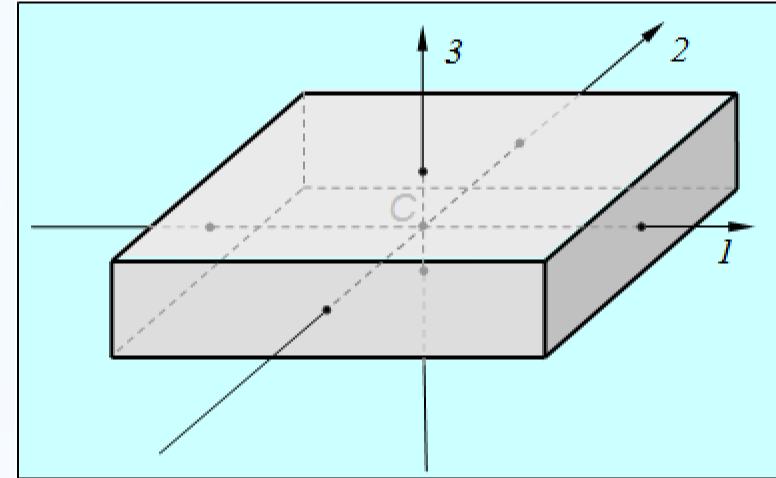
$$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i F_{i\tau}$$

$F_{i\tau}$ - тангенціальна (дотична) складова сили $\vec{F}_i$, саме ця складова викликає обертання навколо осі Z, R –радіус кола.

У техніці машин і механізмів момент сили часто називають крутильним моментом.

Основне рівняння динаміки обертального руху ТТ

Існують такі осі обертання тіл, які не змінюють своєї орієнтції без дії на них зовнішніх сил. Такі осі називаються *вільними* (або осями вільного обертання). В будь-якому тілі існують три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через центр мас тіла і можуть бути вільними осями. Їх називають **головними осями інерції**.



Якщо вісь обертання ТТ співпадає з головною віссю інерції, яка проходить через центр мас, має місце векторна рівність.

$$\vec{M}_z = J_z \vec{\beta}$$

Основне рівняння динаміки обертального руху ТТ

Рівність $\overrightarrow{M_z} = J_z\vec{\beta}$ можна також записати наступним чином:

$$\vec{\beta} = \frac{\overrightarrow{M_z}}{J_z} \qquad (\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m})$$

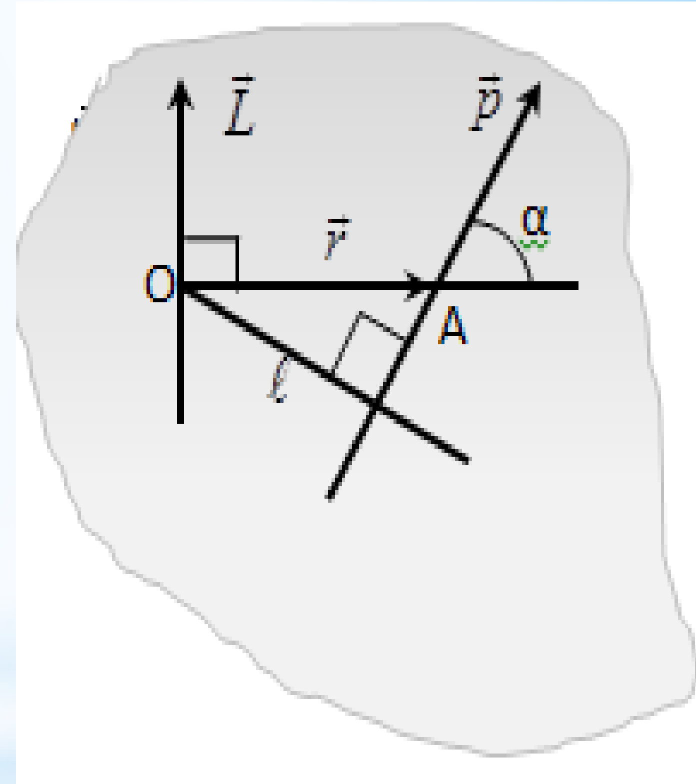
Кутове прискорення ТТ, яке обертається навколо нерухомої осі OZ , прямо пропорційне результуючому моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло і обернено пропорційне моменту інерції тіла відносно тієї ж осі.

Обидва ці рівняння називають ***рівнянням динаміки обертального руху ТТ.***

(Індекс Z означає, що обертання і момент інерції твердого тіла розглядаються відносно осі Z)

Момент імпульсу

Аналогом імпульсу як характеристики поступального руху є характеристика обертального руху, яка називається моментом імпульсу МТ (тіла).



Моментом імпульсу МТ відносно нерухомої точки називається векторна ФВ, рівна векторному добутку радіус-вектора МТ, проведеного з даної точки, на імпульс цієї МТ

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$ або

$$L_i = r_i m_i v_i sin\alpha$$

Момент імпульсу

Моментом імпульсу МТ відносно нерухомої осі Z називається скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно довільної точки на осі Z.

Момент імпульсу ТТ відносно точки - векторна величина рівна векторній сумі моментів імпульсу всіх МТ, з яких складається ТТ

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i \vec{v}_i$$

Момент імпульсу ТТ відносно нерухомої осі Z називається скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно довільної точки на осі Z.

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz}$$

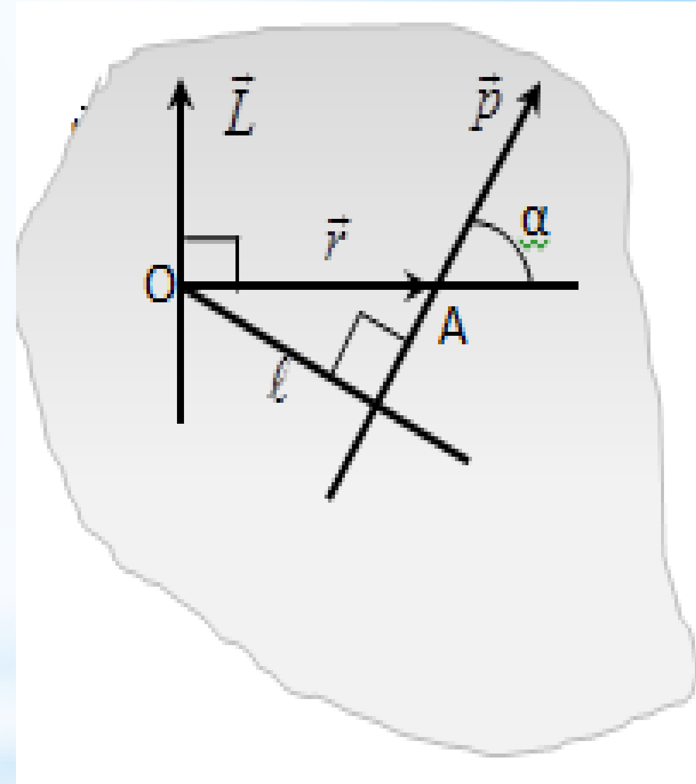
Момент імпульсу

Для обертального руху МТ по колу радіуса R_i момент імпульсу відносно осі задається формулою

$$L_{iz} = R_i m_i v_i$$

Для ТТ момент імпульсу відносно осі Z знаходиться як сума відповідних моментів імпульсу усіх його точок

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i m_i v_i = \sum_{i=1}^{N} R_i m_i \omega R_i = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$



Отже,

$$L_z = J_z \omega$$

Основний закон динаміки обертального руху

$$L_z = J_z\omega$$

Тобто момент інерції ТТ відносно осі дорівнює добутку моменту імпульсу та кутової швидкості.

Візьмемо похідну від цього виразу за часом:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(J_z\omega)}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\beta = M$$

У векторній формі отримаємо наступний запис:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$$

Це більш загальна форма основного закону динаміки обертального руху

$$\frac{d\overrightarrow{L_z}}{dt} = \overrightarrow{M_z}$$

Основний закон динаміки обертального руху:

Швидкість зміни моменту імпульсу дорівнює моменту обертаючої сили (якщо діє кілька моментів сил, то результуючому моменту)

Це рівняння іноді називають рівнянням моментів: похідна за часом від моменту імпульсу МТ відносно нерухомої точки (полюса) дорівнює моменту рушійної сили, що діє відносно тієї ж точки.

Також з цієї рівності випливає закон збереження моменту імпульсу

Аналогія між лінійними та кутовими характеристиками

Запис основного закону динаміки обертального руху $\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$

аналогічний загальній формі запису *ІІ* закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Поступальний рух	Обертальний рух
Маса, m	Момент інерції, J
Швидкість, $v = \frac{dr}{dt}$	Кутова швидкість, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Прискорення, $a = \frac{dv}{dt}$	Кутове прискорення, $\beta = \frac{d\omega}{dt}$
Сила, $\vec{F}$	Момент сили, $\vec{M}$
Імпульс, $\vec{p}$	Момент імпульсу, $\vec{L}$